9/4/2020 ①

Εισαγωγή στην Τοπολογία
5ο online μάθημα

Υπενθύμιση: Αν (X, ρ) μ.χ. $A \subseteq X$ και $x_0 \in X$

$x_0 \in A^\circ \Leftrightarrow \exists \epsilon > 0 \quad B_\rho(x_0, \epsilon) \subseteq A$

$x_0 \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad B_\rho(x_0, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$

$x_0 \in A' \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad B_\rho(x_0, \epsilon) \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$

A°: Εσωτερικό σύνολο του A.

$\bar{A}$: κλειστή θήκη του A

A': Παράγωγο σύνολο του A.

Επίσης

$x_0 \in \bar{A} \Leftrightarrow$ υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A με $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$

$x_0 \in A' \Leftrightarrow x_0 \in \overline{A \setminus \{x_0\}}$

$\Leftrightarrow$ υπάρχει ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A με $x_n \neq x_0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $x_n \xrightarrow{\rho} x_0$

$x_0 \in A' \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0$ το $B_\rho(x_0, \epsilon) \cap A$ είναι άπειρο σύνολο

Παρατήρηση: $x \in \bar{A} \Leftrightarrow$ Για κάθε $U \subseteq X$, U ανοικτό με $x \in U$ ισχύει $A \cap U \neq \emptyset$

U υποσύνολο του X

$\rightarrow$ να έχουν κοινά σημεία.

Απόδειξη: $\Leftarrow$) Έστω $\epsilon > 0$. Τότε το $B_\rho(x, \epsilon)$ είναι ανοικτό με $x \in B_\rho(x, \epsilon)$

Άρα από υπόθεση $A \cap B_\rho(x, \epsilon) \neq \emptyset$. Αυτό συμβαίνει $\forall \epsilon > 0$ έχουμε $x \in \bar{A}$

$\Rightarrow$) Έστω U ανοικτό με $x \in U$. Τότε $\exists \epsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x, \epsilon) \subseteq U$

Εφόσον $x \in \bar{A}$ έχουμε $B_\rho(x, \epsilon) \cap A \neq 0$ άρα $U \cap A \neq \emptyset$ άρα $A \cap U \neq \emptyset$.

Φυλλάδιο 2

① Καταρχήν εφόσον $\rho(x, y) = |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $\epsilon > 0$

$B_\rho(x, \epsilon) = (x - \epsilon, x + \epsilon)$

a) Για το $A = \{0\} \cup (3, 4] \cup \{5\}$

Το σύνολο $(3, 4)$ είναι ανοικτό (ως ανοικτό διάστημα)

και $(3, 4) \subseteq A$.

Άρα $(3, 4) \subseteq A^\circ$ ενώ $A^\circ \subseteq A = \{0\} \cup (3, 4] \cup \{5\}$

Για το σημείο 0, εφόσον $(-\epsilon, \epsilon) \nsubseteq A \quad \forall \epsilon > 0$ συμπεραίνουμε $0 \notin A^\circ$

Για το σημείο 4, $(4 - \epsilon, 4 + \epsilon) \nsubseteq A \quad \forall \epsilon > 0$ άρα $4 \notin A^\circ$

Ομοίως,

(9)

για το 5, $(5-\epsilon, 5+\epsilon) \notin A$ $\forall \epsilon > 0$ άρα $5 \notin A^\circ$

Συμπεραίνουμε ότι $A^\circ = (3,4)$

Έχουμε $A \subseteq \bar{A}$ άρα $\{0\} \cup (3,4] \cup \{5\} \subseteq \bar{A}$

Για το σημείο 3 έχουμε ότι $3 \in \bar{A}$ διότι $\forall \epsilon > 0$ ισχύει $(3-\epsilon, 3+\epsilon) \cap A \neq \emptyset$

Άρα $\{0\} \cup [3,4] \cup \{5\} \subseteq \bar{A}$

Το σύνολο $\{0\} \cup [3,4] \cup \{5\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $A \subseteq \{0\} \cup [3,4] \cup \{5\}$ Συνεπώς $\bar{A} \subseteq \{0\} \cup [3,4] \cup \{5\}$

Επομένως, $\bar{A} = \{0\} \cup [3,4] \cup \{5\}$

Εφόσον $A' \subseteq \bar{A}$ έχουμε ότι $A' \subseteq \{0\} \cup [3,4] \cup \{5\}$

Παρατηρούμε ότι $0 \notin A'$ (διότι για $\epsilon = 1/2$ έχουμε $(0-1/2, 0+1/2) \cap (A \setminus \{0\}) = \emptyset$)

Ομοίως $5 \notin A'$ (διότι $\epsilon = 1/2$ έχουμε $(5-1/2, 5+1/2) \cap (A \setminus \{5\}) = \emptyset$)

Για κάθε $x \in [3,4]$ παρατηρούμε ότι $\forall \epsilon > 0$ ισχύει $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ άρα $x \in A'$.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι $A' = [3,4]$

Σημείωση: Τα 0 και 5 είναι μεμονωμένα σημεία του A.

β) $B = \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \}$

Έχουμε $B^\circ = \emptyset$ (διότι για οποιοδήποτε $x \in \mathbb{R}$ και $\forall \epsilon > 0$ το $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ περιέχει στοιχεία του B)

Υπολογίζουμε $\bar{B}$.

Έχουμε $B \subseteq \bar{B}$ άρα $\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \subseteq \bar{B}$

Επίσης $0 \in \bar{B}$. $\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \cup \{0\} \subseteq \bar{B}$

Το σύνολο $\{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \cup \{0\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ διότι το συμπλήρωμα του, δηλαδή το σύνολο $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n} \right) \right)$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ως ένωση ανοικτών διαστημάτων.

Ενώ $B \subseteq \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \cup \{0\}$

Συνεπώς $\bar{B} \subseteq \{ \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \} \cup \{0\}$

Συνεπώς $\bar{B} = \{ \frac{1}{n} : n\in\mathbb{N} \} \cup \{0\}$

Υπολογίζουμε τώρα το B'

$B' \subseteq \bar{B}$ άρα $B' \subseteq \{ \frac{1}{n} : n\in\mathbb{N} \} \cup \{0\}$

Για το σημείο 0 έχουμε $0 \in B'$

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ έχουμε $\frac{1}{n} \notin B'$

Επομένως $B' = \{0\}$

Σημείωση: Τα σημεία $\frac{1}{n}$ για $n\in\mathbb{N}$ είναι μεμονωμένα σημεία του B

γ) $\Gamma = \mathbb{Q} \cap (0,1)$

Ισχύει $\Gamma^{\circ} = \emptyset$

Ισχύει $\bar{\Gamma} = [0,1]$

Τέλος $\Gamma' = [0,1]$

δ) Για το $\Delta = \mathbb{Q} \cup \{\sqrt{2}\}$

Έχουμε $\Delta^{\circ} = \emptyset$ αφού για οποιοδήποτε $x\in\mathbb{R}$ και κάθε $\epsilon > 0$

ισχύει $(x-\epsilon, x+\epsilon) \not\subseteq \Delta$

$\bar{\Delta} = \mathbb{R}$ αφού $\forall x\in\mathbb{R}$ και κάθε $\epsilon > 0$ ισχύει $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap \Delta \neq \emptyset$

αφού το διάστημα $(x-\epsilon, x+\epsilon)$ περιέχει ρητούς άρα τέμνει το Δ.

$\Delta' = \mathbb{R}$ αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}$ $(x-\epsilon, x+\epsilon) \cap (\Delta \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ αφού το $(x-\epsilon, x+\epsilon)$

περιέχει στοιχεία του Δ εκτός του x άρα το $(x-\epsilon, x)$ έχει ρητούς

β) Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ να θεωρήσουμε μια ακολουθία στο σύνολο $(n, n+1)$

που να συγκλίνει στο n και το σύνολο E να αποτελείται από τους

όρους όλων αυτών των ακολουθιών

Θέτουμε $E = \{ n + \frac{1}{2m} : n\in\mathbb{N}, m\in\mathbb{N} \}$

Τότε $\forall n\in\mathbb{N}$ η ακολουθία $x_m = n + \frac{1}{2m}$, $m = 1, 2, \dots$

αποτελείται από στοιχεία του E διαφορετικά του n και ισχύει

$x_m \to n$. Άρα $n \in E'$. Άρα $\mathbb{N} \subseteq E'$. Άρα $x \in \mathbb{R}$ με $x \notin \mathbb{N}$ τότε $x \notin E'$.

Πράγματι, έστω $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

α) Αν $x < 1$ τότε $\varepsilon = 1 - x > 0$ έχουμε $(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap (E \setminus \{x\}) = \emptyset$

άρα $x \notin E'$.

β) Αν $x > 1$ τότε εφόσον $x \notin \mathbb{N}$ υπάρχει μοναδικός $n \in \mathbb{N}$ $(n = [x])$

ώστε $n < x < n+1$.

Θεωρώντας $\varepsilon > 0$ με $\varepsilon < \min\{x-n, (n+1)-x\}$ το

$E \cap (x-\varepsilon, x+\varepsilon)$ είναι πεπερασμένο σύνολο άρα $x \notin E'$.

Επομένως $E' = \mathbb{N}$.

γ) Το $\mathbb{Q}$ είναι αριθμήσιμο

Έστω $\mathbb{Q} = \{q_1, q_2, \dots\}$ μια αρίθμηση των ρητών

τότε $\mathbb{Q} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\}$ όπου $\forall n \in \mathbb{N}$ το $\{q_n\}$ είναι κλειστό

Παίρνοντας συμπληρώματα έχουμε

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{q_n\} \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\mathbb{R} \setminus \{q_n\})$ όπου $\forall n \in \mathbb{N}$ το $\mathbb{R} \setminus \{q_n\}$ είναι ανοικτό

(2) $\mathbb{R}^2$ με την ευκλείδεια μετρική

$A = (0,1) \times \{0\}$

Ισχύει $A^{\circ} = \emptyset$ (διότι για $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $\varepsilon > 0$ το $B_\rho((x_0, y_0), \varepsilon)$ περιέχει σημεία εκτός του άξονα των x άρα δεν είναι υποσύνολο του A)

Ισχύει $\bar{A} = [0,1] \times \{0\}$

α) $[0,1] \times \{0\} \subseteq \bar{A}$. $(0,1) \times \{0\} = A \subseteq \bar{A}$

Επίσης $(0,0) \in \bar{A}$ και $(0,1) \in \bar{A}$

β) $\bar{A} \subseteq [0,1] \times \{0\}$

Έτσι το $[0,1] \times \{0\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ με

$A \subseteq [0,1] \times \{0\}$ άρα $\bar{A} \subseteq [0,1] \times \{0\}$

Επομένως, $\bar{A} = [0,1] \times \{0\}$

$A' = [0,1] \times \{0\}$

$B = \{ (\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N} \}$, $B^\circ = \emptyset$

$\bar{B} = B \cup \{(0,2)\}$

$(0,2) \in \bar{B}$ διότι $(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}) \xrightarrow{\rho_2} (0,2)$ και $(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}) \in B$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$B \subseteq \bar{B}$ και $B \cup \{(0,2)\} \subseteq \bar{B}$

Επίσης το $B \cup \{(0,2)\}$ είναι κλειστό και $B \subseteq B \cup \{(0,2)\}$ είναι κλειστό

Επομένως $\bar{B} = B \cup \{(0,2)\}$

$B' = \{(0,2)\}$

Έχουμε $B' \subseteq \bar{B} = B \cup \{(0,2)\}$

$(0,2) \in B'$ διότι $(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}) \xrightarrow{\rho_2} (0,2)$

και $(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}) \in B \setminus \{(0,2)\}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Επίσης για κάθε σημείο του B δηλαδή για $(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n})$ για $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}) \notin B'$

διότι για μικρό ϵ το $B_{\rho_2}((\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n}), \epsilon) \cap B$ περιέχει μόνο το $(\frac{1}{n}, 2 - \frac{1}{n})$. Επομένως $B' = \{(0,2)\}$

β) Έστω $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}}$

και $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ με $(x_n, y_n) \xrightarrow{\rho_2} (x,y)$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ εφόσον $(x_n, y_n) \in M$ $x_n \neq 0$ και $y_n = \frac{1}{x_n}$

Άρα $(x_n, \frac{1}{x_n}) \xrightarrow{\rho_2} (x,y)$

συνεπώς $\left. \begin{array}{l} x_n \to x \\ \frac{1}{x_n} \to y \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} x_n \cdot \frac{1}{x_n} \to xy \\ 1 \to xy \end{array}$

$1 \to 1$ άρα $xy = 1$. Επομένως $xy \neq 0$ και $y = \frac{1}{x}$ άρα $(x,y) \in M$

Έτσι αποδείχθηκε ότι το M είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$

③ Έστω $x \in U \cap A$

Τότε $x \in U$ και $x \in A$

Εφόσον U ανοικτό $\exists \varepsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq U$

Εφόσον $x \in \bar{A}$ ισχύει $B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \neq \emptyset$

Έτσι $B_\rho(x,\varepsilon) \subseteq U \Rightarrow B_\rho(x,\varepsilon) \cap A \subseteq U \cap A$.

Επομένως $U \cap A \neq \emptyset$

④ (i) => (ii) Έστω $x \in G \cap \bar{A} \Rightarrow \begin{cases} x \in G \\ x \in \bar{A} \end{cases}$

Θ.δ.ο. $x \in \overline{G \cap A}$

Έστω ότι U ανοικτό με $x \in U$.

Τότε $x \in U \cap G$ και εφόσον το $U \cap G$ είναι ανοικτό και $x \in \bar{A}$ προκύπτει ότι $(U \cap G) \cap A \neq \emptyset$ δηλαδή $U \cap (G \cap A) \neq \emptyset$.

Επομένως $x \in \overline{G \cap A}$

(ii) => (iii) $G \cap \bar{A} \subseteq \overline{G \cap A} \Rightarrow \overline{G \cap \bar{A}} \subseteq \overline{\overline{G \cap A}}$

Εφόσον το σύνολο $\overline{G \cap A}$ είναι κλειστό ισχύει $\overline{\overline{G \cap A}} = \overline{G \cap A}$

Άρα $\overline{G \cap \bar{A}} \subseteq \overline{G \cap A}$

Εφόσον $A \subseteq \bar{A} \Rightarrow G \cap A \subseteq G \cap \bar{A} \Rightarrow \overline{G \cap A} \subseteq \overline{G \cap \bar{A}}$

Επομένως $\overline{G \cap \bar{A}} = \overline{G \cap A}$

(iii) => (i) Εφόσον η (iii) ισχύει για καθε $A \subseteq X$ θα ισχύει και για $A = X \setminus G$ άρα

$\overline{G \cap \overline{X \setminus G}} = \overline{G \cap (X \setminus G)}$

$\Rightarrow \overline{G \cap (X \setminus G^\circ)} = \bar{\emptyset} \Rightarrow \overline{G \setminus G^\circ} = \emptyset \Rightarrow G \setminus G^\circ = \emptyset \Rightarrow G \subseteq G^\circ$

Άρα $G = G^\circ$ επομένως το G είναι ανοικτό

⑤ Γ.ν.δ.ο. το A είναι κλειστό αρκεί ν.δ.ο. το $X \setminus A$ είναι ανοικτό.

Έστω $y \in X \setminus A$. Τότε $y \neq x$ και $y \neq x_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Θέτοντας $\delta = \rho(y,x)$ έχουμε $\delta > 0$. Εφόσον $x_n \xrightarrow{\rho} x$ $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\rho(x_n, x) < \delta/2$ $\forall n > n_0$

Θέτουμε $\varepsilon = \min\{ \frac{\delta}{2}, \rho(y,x_1), \dots, \rho(y, x_{n_0}) \}$

7

Θ.δ.ο. $B_\rho(y,\epsilon) \subseteq X \setminus A$

η ισοδύναμα ότι $B_\rho(y,\epsilon) \cap A = \emptyset$

Καταρχήν $x \notin B_\rho(y,\epsilon)$

Για $n > n_0$ έχουμε $x_n \in B_\rho(x, \frac{\delta}{2})$

και $B_\rho(y,\epsilon) \subseteq B_\rho(y, \delta/2)$ και $B_\rho(x, \delta/2) \cap B_\rho(y, \delta/2) = \emptyset$

Άρα $x_n \notin B_\rho(y,\epsilon)$

Για $n \leq n_0$

Έχουμε $\epsilon \leq \rho(y, x_n)$ άρα $x_n \notin B_\rho(y,\epsilon)$

Επομένως έχουμε $B_\rho(y,\epsilon) \cap A = \emptyset$ δηλαδή $B_\rho(y,\epsilon) \subseteq X \setminus A$

Επομένως το σύνολο $X \setminus A$ είναι ανοικτό δηλαδή το A είναι κλειστό

6) (i) $x \in A' \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \quad B_\rho(x,\epsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}}$

(ii) Γνωρίζουμε ότι $\bar{A} = A \cup A'$

$\Rightarrow$) Έστω ότι A κλειστό. Τότε $\bar{A} = A$ άρα $A \cup A' = A$.

Συνεπώς $A' \subseteq A$

$\Leftarrow$) Αν $A' \subseteq A$ τότε $A' \cup A = A$ άρα $\bar{A} = A$. Συνεπώς το A είναι κλειστό.

(iii) Υποθέτουμε ότι $A \subseteq B$

$x \in A' \Rightarrow x \in \overline{A \setminus \{x\}} \Rightarrow x \in \overline{B \setminus \{x\}} \Rightarrow x \in B'$. Άρα $A' \subseteq B'$

(iv) Για ν.δ.ο. το A' είναι κλειστό αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $X \setminus A'$ είναι ανοικτό. Έστω $x \in X \setminus A'$. Τότε $x \notin A'$ άρα $\exists \epsilon > 0$ ώστε

$B_\rho(x,\epsilon) \cap (A \setminus \{x\}) = \emptyset \quad (1)$.

Έστω $y \in B_\rho(x,\epsilon)$

a) Αν $y = x$ τότε εφόσον $x \in X \setminus A'$ έχουμε $y \in X \setminus A'$

b) Αν $y \neq x$ τότε $0 < \rho(y,x) < \epsilon$

Θέτουμε $\delta = \min\{\rho(y,x), \epsilon - \rho(y,x)\}$. Τότε $\delta > 0$

και $B_\rho(y,\delta) \subseteq B_\rho(x,\epsilon) \setminus \{x\}$. Άρα από (1) $B_\rho(y,\delta) \cap A = \emptyset$

Άρα $B_\rho(y,\delta) \cap A \setminus \{y\} = \emptyset$ Επομένως $y \in X \setminus A'$

Έτσι αποδείξαμε ότι $\forall x \in X \setminus A' \; \exists \epsilon > 0$ ώστε $B_\rho(x,\epsilon) \subseteq X \setminus A'$

Επομένως το $X \setminus A'$ είναι ανοικτό άρα το A' είναι κλειστό

(v) Αν $int(\{x\}) = \emptyset$ τότε $x \notin int(\{x\})$

άρα $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει $B_\rho(x,\varepsilon) \nsubseteq \{x\}$

δηλαδή $\forall \varepsilon > 0$ ισχύει $B_\rho(x,\varepsilon) \cap (X \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

Άρα το x είναι σημείο συσσώρευσης του X.

(vi) Υποθέτουμε ότι $x \in A'$

Τότε $B_\rho(x,1) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$ επιλέγουμε $x_1 \in B_\rho(x,1) \cap (A \setminus \{x\})$

Τότε $\rho(x, x_1) < 1$, $x_1 \in A$ $x_1 \neq x$

Υποθέτουμε ότι έχουν επιλεχθεί τα $x_1, \dots, x_n$

ώστε $\rho(x, x_k) < \frac{1}{k}$, $x_k \in A$, $x_k \neq x$ για $k \in \{1, \dots, n\}$

Θέτουμε $\varepsilon = \min\{\frac{1}{n+1}, \rho(x,x_1), \dots, \rho(x,x_n)\}$

τότε $B_\rho(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\}) \neq \emptyset$

Επιλέγουμε $x_{n+1} \in B_\rho(x,\varepsilon) \cap (A \setminus \{x\})$

Τότε $x_{n+1} \in A$, $x_{n+1} \neq x_n$ $\rho(x_{n+1}, x) < \varepsilon \leq \frac{1}{n+1}$

και $x_{n+1} \neq x_i$ για $i = 1, \dots, n$

Έτσι κατασκευάσαμε επαγωγικά ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο A με $x_n \neq x$ $\forall n$

$x_i \neq x_j$ για $i,j \in \mathbb{N}$ με $i \neq j$.

και $\rho(x_n, x) < \frac{1}{n}$ $\forall n$ άρα $x_n \xrightarrow{\rho} x$

(7) Υπενθυμίζουμε ότι για $K, \Lambda \subseteq X$ με $K \neq \emptyset$, $\Lambda \neq \emptyset$

$$\rho(K,\Lambda) = \inf\{\rho(x,y) : x \in K, y \in \Lambda\}$$

Έτσι γενικά αν $\emptyset \neq K_1 \subseteq K_2$ και $\emptyset \neq \Lambda_1 \subseteq \Lambda_2$

τότε $\{\rho(x,y) : x \in K_1, y \in \Lambda_1\} \subseteq \{\rho(x,y) : x \in K_2, y \in \Lambda_2\}$

$\Rightarrow \inf\{\rho(x,y) : x \in K_2, y \in \Lambda_2\} \leq \inf\{\rho(x,y) : x \in K_1, y \in \Lambda_1\}$

$$\Rightarrow \rho(K_2, \Lambda_2) \leq \rho(K_1, \Lambda_1)$$

Έστω τώρα A, B δύο μη κενά υποσύνολα του X.

Τότε $A \subseteq \bar{A}$ και $B \subseteq \bar{B}$ άρα $\rho(\bar{A}, \bar{B}) \leq \rho(A,B)$

Θ.δ.ο. $\rho(A,B) \leq \rho(\bar{A},\bar{B})$

Αρκεί ν.δ.ο. $\forall \epsilon > 0$ ισχύει $\rho(A,B) \leq \rho(\bar{A},\bar{B}) + \epsilon$

$\iff \rho(A,B) - \epsilon \leq \rho(\bar{A},\bar{B})$

Έστω $\epsilon > 0$.

Θ.δ.ο. $\rho(A,B) - \epsilon \leq \rho(\bar{A},\bar{B})$

Έστω $x \in \bar{A}$, $y \in \bar{B}$.

Τότε $B_\rho(x, \epsilon/2) \cap A \neq \emptyset$. Επιλέγουμε $x_1 \in B_\rho(x, \epsilon/2) \cap A$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 \in A \\ \rho(x,x_1) < \epsilon/2 \end{cases}$$

και $B_\rho(y, \epsilon/2) \cap B \neq \emptyset$. Επιλέγω $y_1 \in B_\rho(y, \epsilon/2) \cap B$

$$\Rightarrow \begin{cases} y_1 \in B \\ \rho(y,y_1) < \epsilon/2 \end{cases}$$

$$\rho(A,B) \leq \rho(x_1,y_1) \leq \rho(x_1,x) + \rho(x,y) + \rho(y,y_1) < \epsilon/2 + \rho(x,y) + \epsilon/2$$

$$\Rightarrow \rho(A,B) - \epsilon < \rho(x,y)$$

Εφόσον αυτό συμβαίνει για κάθε $x \in \bar{A}$, $y \in \bar{B}$ συμπεραίνουμε ότι

$\rho(A,B) - \epsilon \leq \inf\{\rho(x,y) : x \in \bar{A}, y \in \bar{B}\}$

δηλαδή $\rho(A,B) - \epsilon \leq \rho(\bar{A},\bar{B})$

ή $\rho(A,B) \leq \rho(\bar{A},\bar{B}) + \epsilon$

Εφόσον αυτό συμβαίνει για κάθε $\epsilon > 0$ έχουμε $\rho(A,B) \leq \rho(\bar{A},\bar{B})$

Επομένως $\rho(\bar{A},\bar{B}) = \rho(A,B)$

8 α) Εφόσον $\rho(x,A) \geq 0$ και $\rho(x,B) \geq 0$ για κάθε $x \in X$.

Ισχύει $\rho(x,A) + \rho(x,B) \geq 0$ για κάθε $x \in X$.

Αν $\rho(x,A) + \rho(x,B) = 0$ τότε $\begin{cases} \rho(x,A) = 0 \\ \rho(x,B) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in \bar{A} \\ x \in \bar{B} \end{cases}$

A, B κλειστά $\implies$ $\begin{matrix} x \in A \\ x \in B \end{matrix} \Rightarrow x \in A \cap B \Rightarrow x \in \emptyset$ άτοπο

Άρα $\rho(x,A) + \rho(x,B) > 0 \quad \forall x \in X$ και η f ορίζεται καλά

Εφόσον $0 \leq \rho(x,A) \leq \rho(x,A) + \rho(x,B) \quad \forall x \in X$

Προκύπτει $\quad 0 \leq \dfrac{\rho(x,A)}{\rho(x,A)+\rho(x,B)} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 1 \quad \forall x \in X.$

Επίσης από την θεωρία γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση

$\phi_A : X \to \mathbb{R} \qquad \phi_A(x) = \rho(x, A)$ είναι συνεχής και ομοίως

$\phi_B : X \to \mathbb{R} \qquad \phi_B(x) = \rho(x, B)$ είναι συνεχής

Εφόσον $f = \dfrac{\phi_A}{\phi_A + \phi_B}$ η f είναι συνεχής.

Τέλος για κάθε $x \in A$ έχουμε $\rho(x,A) \geq 0$ άρα

$$f(x) = \frac{\rho(x,A)}{\rho(x,A)+\rho(x,B)} = \frac{0}{0+\rho(x,B)} = 0$$

ενώ για κάθε $x \in B$ έχουμε $\rho(x,B) = 0$

άρα $\quad f(x) = \dfrac{\rho(x,A)}{\rho(x,A)+0} = 1$

β) Ορίζουμε $\quad U = f^{-1}\left(\left(-1/2,\ 1/2\right)\right)$

$\qquad V = f^{-1}\left(\left(1/2,\ 3/2\right)\right)$

Τα U, V είναι ανοικτά.

U, V είναι ξένα

$A \subseteq f^{-1}(\{0\}) \subseteq f^{-1}\left(\left(-1/2,\ 1/2\right)\right) = U$

$B \subseteq f^{-1}(\{1\}) \subseteq f^{-1}\left(\left(1/2,\ 3/2\right)\right) = V$

Άσκηση: Έστω A ένα κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και $f: A \to \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Να δειχθεί ότι το γράφημα της f δηλαδή το σύνολο $\Gamma = \{(x, f(x)) : x \in A\}$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$

Απόδειξη: (Υπόδειξη: Με χρήση ακολουθιών)

Αρκεί ν.δ.ο. για κάθε ακολουθία $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στο Γ και κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ ώστε $(x_n, y_n) \xrightarrow{\rho_2} (x,y)$ ισχύει $(x,y) \in \Gamma$.

Έστω λοιπόν $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ και $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στο Γ ώστε $(x_n, y_n) \xrightarrow{\rho_2} (x,y)$

Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει (εφόσον $(x_n, y_n) \in \Gamma$) $\begin{cases} x_n \in A \\ y_n = f(x_n) \end{cases}$

Εφόσον $(x_n, y_n) \xrightarrow{\rho_2} (x,y)$ θα έχουμε $x_n \to x$, $y_n \to y$

δηλαδή $\begin{cases} x_n \to x \\ f(x_n) \to y \end{cases}$

Εφόσον $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολουθίες στο A, $x_n \to x$ και το A είναι κλειστό συμπεραίνουμε $x \in A$.

Εφόσον η f είναι συνεχής, θα είναι συνεχής στο x άρα εφόσον $x_n \to x$ προκύπτει $f(x_n) \to f(x)$

Εφόσον $f(x_n) \to f(x)$ και $f(x_n) \to y$ συμπεραίνουμε ότι $f(x) = y$

Εφόσον $x \in A$ και $y = f(x)$ έχουμε $(x,y) \in \Gamma$.

Επομένως το Γ είναι κλειστό

$\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$

$\Gamma^o = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$

$\overline{\Gamma} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$

$\Gamma' = \overline{\Gamma}$